

WIELOMIANY I FUNKCJE WYMIERNE

1. Rozwiąż nierówność $\frac{1}{x} > \frac{2}{x-1}$.
2. Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ wielomian $W(x) = x^{13} + 3x + a$ a dzieli się bez reszty przez $x+1$?
3. Rozwiązać nierówność:
 - a) $x < \frac{1}{x}$
 - b) $\frac{2-5x}{x+1} > 2$
4. Wyznaczyć wartości parametru m tak, aby liczba 2 była pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + mx - 1$.
5. Sprowadzić wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ do postaci iloczynowej.
6. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$. Rozwiązać nierówność $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) < f(x^3) - f\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
7. Rozwiązać układ nierówności $-4 < \frac{3}{x^2 - 1} < 1$.
8. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x} + 1$. Rozwiązać nierówność $f(x) > f(2-x)$.
9. Wykazać, że wielomian $W(x) = x^6 - x^4 + 3x^2 - 3$ ma dokładnie dwa miejsca zerowe.
10. Dla jakich wartości parametrów a i b równanie $x^3 - 2x^2 + ax + b = 0$ ma pierwiastek podwójny $x = 1$?
11. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{\frac{5}{x+2}} - 1$.
12. Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ wielomian $W(x) = m^2x^5 + 4x^2 - 5m$ jest podzielny przez dwumian $(x-1)$?
13. Rozwiązać nierówność $f(-x) < 2f(x)$, jeżeli $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.
14. Rozwiązać nierówność $x^2 - 4x + 9 \leq \frac{18}{x+2}$.
15. Dla jakich wartości a i b wielomian $W(x) = 12x^4 - 17x^2 + ax + b$ jest podzielny bez reszty przez $2x^2 + x - 1$?
16. Ile pierwiastków ma równanie $(x+3)^2(x+8)^3 = 108$?
17. Dla jakich wartości m równanie $x + \frac{1}{x} = m$ nie ma rozwiązań rzeczywistych?
18. Wiedząc, że wielomian $W(x) = x^3 - 3x + a$ a dzieli się bez reszty przez $(x+1)$. Rozłożyć ten wielomian na czynniki. Jaki jest wtedy parametr a ?
19. Sprawdzić, czy wielomian $(x-2)^{102} + (x-1)^{101} - 1$ jest podzielny przez wielomian $x^2 - 3x + 2$.
20. Dla jakich wartości parametru a , oraz b resztą z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 + ax + b$ przez $x^2 - 1$ jest wielomian $R(x) = 2x - 3$?
21. Rozłożyć na czynniki wielomian $W(x) = x^4 + x^2 + 1$.
22. Dla jakich wartości parametrów a i b liczba -1 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$?
23. Zakładając, że wielomian $P(x) = x^2 - 2x - 3$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$. Wyznaczyć wartości parametrów a i b . Dla wyznaczonych a i b obliczyć $W(-1)$.
24. Rozwiązać równanie:

$$a) 6x^3 - 7x^2 + 1 = 0$$

$$b) 2x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$$

25. Rozwiąż nierówność:

$$a) \frac{1+x^3}{x^2-4} \leq x$$

$$b) \frac{x^3-x+6}{x^2} \geq 0$$

$$c) x^3 - 2x^2 - x + 2 \geq 0$$

26. Znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $x^{2003} - x^{2002} + 2$ przez $x^3 - x$

27. Wyznaczyć wszystkie wartości współczynników p i q wielomianu $W(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + px + q$ tak, aby przy dzieleniu go przez wielomian $x^2 - 2x + 2$ reszta była równa $2x - 1$.

28. Dla jakich wartości k liczba k jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - (k+2)x + k + 1$?

29. Dla jakich wartości k reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + 2x^2 + k^2x - 8$ przez dwumian $(x+1)$ jest równa -11 ?

30. Rozwiąż równanie: $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = 2$

31. Wykazać, że dla każdej trójki liczb rzeczywistych a, p, q ($a \neq 0$) równanie $\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} = \frac{1}{a^2}$ ma pierwiastki rzeczywiste.

32. Dwa różne automaty wykonują razem zadaną pracę w ciągu 3 godzin. Gdyby pierwszy automat pracował sam przez 1 godzinę, a następnie drugi pracował sam przez 6 godzin, to wykonałyby 75% całej pracy. W ciągu ilu godzin każdy automat może wykonać całą pracę samodzielnie?

33. Rozwiązać układ równań:
$$\begin{cases} \frac{14}{2x-y} + \frac{1}{x+y} = 1 \\ \frac{3}{y-2x} - \frac{5}{2x-2y} = \frac{29}{14} \end{cases}$$

34. Dane są zbiory: $A = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge |x+1| \leq 3\}$ $B = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge \frac{1}{x} \geq -\frac{1}{4}\}$. Wyznaczyć $A \cap B$ i $A' \cup B'$.

35. Rozwiązać równanie: $\frac{\sqrt{x}}{6-x} + \frac{6-x}{\sqrt{x}} = 2$

36. Wyznaczyć parametry a i b , dla których wielomiany $W(x) = x^2(ax+b)^2$ i $P(x) = 4x^4 + 4x^3 + x^2$ są równe.

37. Ile pierwiastków rzeczywistych może mieć równanie $x^3 + bx + c = 0$

38. Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez $(x-1)$ otrzymujemy resztę 2, a przy dzieleniu przez $(x-2)$ resztę 1. Wyznaczyć resztę z dzielenia $W(x)$ przez $(x-1)(x-2)$

39. Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez $(x-1)$ otrzymujemy resztę 3, a przy dzieleniu $W(x)$ przez $(x-2)$ otrzymujemy resztę 4. Wyznaczyć resztę z dzielenia $W(x)$ przez $(x^2 - 3x + 2)$

40. Wiedząc, że liczba $1 + \sqrt{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + mx^2 + 2x + 4$ wyznaczyć m .

41. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m-1)x^4 - 2(m+4)x^2 + m = 0$ ma 4 pierwiastki.

42. Wiedząc, że wielomian $x^4 + x^2 + ax + b$ jest podzielny przez $(x^2 - 1)$ wyznaczyć resztę z dzielenia tego wielomianu przez $(x-2)$.

43. Wiedząc, że spełnione są warunki $\begin{cases} x^3 - y^3 = 22 \\ x^2 + xy + y^2 = 22 \end{cases}$ obliczyć $x - y$
44. Wyznaczyć sumę S współczynników wielomianu $W(x) = (x^3 - 3x^2 + 4x - 2)^{2004}$ oraz jego wyraz wolny a_0 .
45. Wielomian ma postać $W(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 5$. Obliczyć $2W(-1) - 3W(0) + W(1)$.
46. Wielomiany $W_1(x) = x^5 - x^3 + x^2 - mx + 2$ i $W_2(x) = x^3 + (1-m)x^2 + 2x - 1$ mają wspólny pierwiastek wymierny, wyznaczyć m .
47. Dany jest wielomian $W(x)$ stopnia 2005 o wszystkich współczynnikach równych 1. Wyznaczyć resztę z dzielenia $W(x)$ przez $(x+1)$.
48. Dane są zbiory $A = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge \frac{(x-1)^2 - 4}{x^2 + 1} > 0\}$ $B = \{x: x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \wedge \frac{x+1}{x-3} \geq 0\}$. Wykaż, że zbiór $B \setminus A$ jest jednoelementowy.
49. Rozwiąż równanie $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \frac{x}{x-1} = 2$.
50. Niech $A = \{x: x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \wedge \frac{(x-2)^2}{x+3} \leq 0\}$ $B_s = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge (x^2 - 3)(x-s) \geq 0\}$. Uzasadnić, że $A \cap B_1 \neq \emptyset \wedge A - B_0 \neq \emptyset$.
51. Uzasadnić, że jeśli $g(x) = \frac{(x-3)^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ to $g(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
52. Wykaż, że zbiór wszystkich liczb spełniających nierówność $x^3 + x^2 > 9x + 9$ zawiera się w zbiorze $(-4; \infty)$.
53. Dane są zbiory liczbowe: $A = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge |x+3| \geq 4\}$ $B = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge \frac{3}{x^2 + 1} > 1\}$. Sprawdź, czy $-\sqrt{2} \in A \cup B$.
54. Wiadomo, że $W_1(x) = x^4 - 3$ i $W_2(x) = -x^3 + 2x - 1$. Znaleźć złożenie $(W_2 \circ W_1)(x)$.
55. Niech $w(x)$ będzie dowolnym wielomianem stopnia trzeciego, funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją przyporządkującą liczbie rzeczywistej b resztę z dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $x - b$. Niech $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(b) = w(b)f(b)$. Uzasadnić, że funkcja g ma przynajmniej jedno miejsce zerowe.
56. Obliczyć sumę wszystkich pierwiastków równania $16x^3 + 12x^2 - 16x + 3 = 0$ jeżeli wiadomo, że $2x_1 - 4x_2 = 7$.
57. Ile pierwiastków całkowitych może mieć wielomian $W(x) = x^{17} + ax^3 + bx^2 + x - 1$?
58. Który ze współczynników wielomianu $W(x) = x^{17} + ax^2 + bx + c$ wyznaczony jest przez warunek $W(138) + W(-138) = 4$?
59. Wyznaczyć resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + k(1-k)x^2 - (1-k)^2x - (1-k)^3$ przez dwumian $(x-1+k)$.
60. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ wynosi $x^3 + x^2 - 2x + 1$. Znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x^2 - 1$.
61. Wielomian $W(x) = x^3 + ax + b$ ma pierwiastek dwukrotny x_1 , a ponadto $x_2 = x_1 - 6$. Obliczyć a i b .
62. Liczba 1 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$. Obliczyć a , b , c .
63. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 + x - 1} - \sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$

$$b) f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^3 - x + 6}$$

64. Wielomian $W(x) = (x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 4)^{99}$ można rozłożyć na iloczyn. Ile czynników zawiera ten iloczyn?

65. Wyznacz parametr m tak, aby podane funkcje były równe:

$$a) f(x) = \frac{-3x^2 + x}{x^2} \quad g(x) = mx + 1$$

$$b) f(x) = \frac{2x + m}{(x-1)^2} \quad g(x) = \frac{2}{x-1}$$

66. Wyznaczyc funkcje odwrotne do podanych funkcji:

$$a) f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad b) f(x) = 2 - \frac{1}{x+3}$$

67. Dla jakich wartości parametru m równanie $\left| \frac{x}{x-1} \right| = m$ ma dokładnie jeden pierwiastek ?

68. Wyznacz liczby naturalne nieparzyste, które spełniają nierówność $\frac{3}{x+1} > 4 + \frac{13}{x-3}$

69. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \frac{2x^2 + 8x + 8}{x^2 + 5x + 6}$ dla $x \in (-3; -2)$. Podać prostszy wzór tej funkcji.

70. Wiadomo, że równanie $\frac{a}{x} + b = \frac{1}{x}$ nie ma rozwiązania. Jakie warunki muszą spełniać parametry a i b .

71. Dla jakich parametrów a i b równanie $\frac{a}{x} + b = 1$ ma jedno rozwiązanie?

72. Wyznaczyć wartości parametru k wiedząc, że równanie $\frac{x+1}{x+k} = \frac{x}{x-k}$ nie ma rozwiązania.

73. Wyznaczyć k wiedząc, że zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{2-kx-x^2}{4-3x+x^2} < 1$ jest zbiór \mathbb{R} .

74. Wyznaczyć parametr m wiedząc, że rozwiązaniem układu $\begin{cases} x + my = 1 \\ (m+2)x - y = 1 \end{cases}$ jest para liczb dodatnich.

75. Układ równań $\begin{cases} 5x - 3y = k \\ kx + (1-k)y = 4 \end{cases}$ ma rozwiązanie spełniające warunek $x - y > -2$. Jaki warunek spełnia wtedy parametr k .

76. Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2 - 2(m+1)x + m - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania o tych samych znakach?

77. Wyznaczyć parametr k wiedząc, że funkcja $f(x) = kx^2 + (k+1)x - 1$ przyjmuje największą wartość równą liczbie -1 .

78. Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą k , dla której zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{kx+1}{x^2+1} < k$ jest zbiór \mathbb{R} .

79. Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą k , dla której funkcja f dana wzorem $f(x) = \frac{k^2 + 3k}{k-2} x^2 - kx + k - 2$ ma minimum i dwa różne miejsca zerowe.

80. Wiadomo, że zachodzi równość $(x-2y)^2 + u^2 + 4v^2 = 4uv$. Wyznaczyć $x+u$ oraz $x-u$.

81. Wyznaczyć sumę współczynników wielomianu $(1-3x+2x^2)^{2003}(1+3x-2x^2)^{2003}$
82. Pierwiastkami równania $x^3+ax^2+bx+c = 0$ są liczby 2 i 3. Jaki warunek spełniają parametry a, b, c jeśli wiadomo, że trzeci pierwiastek tego równania jest liczbą całkowitą?
83. Dane są wielomiany $W(x) = x^4 + ax^2 + (a+6)x+3$ i $P(x) = x^3 - x^2 + (a+1)x+4$ gdzie $a \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że dla pewnej wartości a wielomiany te mają wspólny pierwiastek, to jest on liczbą całkowitą.
84. Wyznaczyć zbiór wartości parametru m, dla których równanie $mx^3 - (m-3)x^2 + x = 0$ o niewiadomej x ma co najmniej jedno rozwiązanie dodatnie.
85. Wyznaczyć zbiór wartości parametru p, dla których równanie $px^3 - (p+1)x^2 + 1 = 0$ o niewiadomej x ma trzy różne rozwiązania.
86. Wyznaczyć współczynniki a, b, c równania $x^3+ax^2+bx+c = 0$ o niewiadomej x tak, aby jego rozwiązaniami były tylko liczby a i b.
87. Znajdź te wartości współczynników a i b równania $ax^3+x^2-2x+b = 0$ o niewiadomej x, dla których dwa spośród jego rozwiązań są liczbami przeciwnymi.
88. Znajdź liczby całkowite a i b, dla których rozwiązaniem równania $x^3+ax^2+bx+x = 0$ o niewiadomej x jest liczba $1 - \sqrt{2}$.
89. Przeprowadzić dyskusję rozwiązalności równania $\frac{x}{mx+1} - \frac{1}{x} = m$ w zależności od parametru $m \in \mathbb{R}$.
90. Wyznaczyć zbiór wartości parametru p, dla których równanie $\frac{x}{x-p} - \frac{p}{x} = p$ o niewiadomej x ma jedno rozwiązanie, ma dwa różne rozwiązania.
91. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych spełniających równanie $xy-y-2x-1 = 0$
92. Przeprowadzić dyskusję rozwiązania równania $\left| \frac{x-1}{x-2} \right| = m$ w zależności od parametru m.
93. Rozwiąż równanie $x^3+4x^2+8x+\frac{1}{x^3}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x} = 70$.
94. Rozwiązać nierówność $2x^3-x^2+x-\frac{1}{3} \geq 0$
95. Dane jest równanie: $x^2+3x-\frac{m-2}{m-3} = 0$. Wyznaczyć wartość parametru m, dla którego suma sześciątów pierwiastków tego równania jest równa 9.
96. Dla jakich wartości m równanie $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = m$ ma więcej niż trzy pierwiastki?
97. Dana jest funkcja $f(x) = (x-a)^2[a(x-a)^2-a-1]$. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości a, dla których równanie $f(x) = -1$ ma więcej pierwiastków dodatnich niż ujemnych.
98. Dla jakich wartości parametru m obie nierówności $|m|x-2| - |4x-8| \geq -5|2-x|$ oraz $\frac{1-(m-1)x+mx^2}{(m+1)x-x^2-1} < 0$ są prawdziwe dla każdej liczby rzeczywistej x.
99. Udowodnij, że jeśli $a \neq b$ i $a+b=2c$ to $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$.
100. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $a+b+c=1$. Udowodnij, że $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$.

ODPOWIEDZI

1. $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.
2. $a = 4$.
3. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$
b) $x \in (-1; 0)$.
4. $m = 4\frac{1}{2}$.
5. $W(x) = (x-1)(x-3)(x+2)$.
6. $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.
7. $x \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$.
8. $x \in (0; 1) \cup (2; \infty)$.
9. -
10. $a = 1 \wedge b = 0$
11. $x \in (-2; 3)$
12. $m = 1 \vee m = 4$
13. -
14. $x \in (-2; 0) \cup \{1\}$
15. $a = -1 \wedge b = 4$
16. Dwa pierwiastki
17. $m \in (-2; 2)$
18. $W(x) = (x-2)(x+1)^2$; $a = -2$
19. TAK.
20. $a = 2 \wedge b = -4$
21. $W(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$
22. $a = -1 \wedge b = -5$
23. $a = b = -\frac{7}{3}$; $W(-1) = 0$.
24. a) $x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 1$
b) $x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
25. a) $x \in (-\infty; -2) \cup <-\frac{1}{4}; 2)$
b) $x \in <-2; 0) \cup (0; \infty)$
c) $x \in <-1; 1) \cup <2; \infty)$
26. $R(x) = -x^2 + x + 2$
27. $p = 6 \wedge q = -7$
28. $k = 1 \vee k = -1$
29. $k = 2 \vee k = -2$
30. $x = \frac{1}{9}$.

31. Zakładamy, że $x \neq p \wedge x \neq q$ i otrzymujemy równanie kwadratowe, które ma dwa pierwiastki rzeczywiste $x_1 = \frac{2a^2 + p + q - \sqrt{\Delta}}{2}$; $x_2 = \frac{2a^2 + p + q + \sqrt{\Delta}}{2}$. Są one pierwiastkami równania wymiernego, jeśli $p \neq q$. Jeżeli $p = q$ to tylko $x_2 = 2a^2 + p$ jest pierwiastkiem równania wymiernego.
32. Pierwszy w ciągu 4 godzin, drugi w ciągu 12 godzin.
33. $x = 2$; $y = -3$.
34. $A \cap B = \{x: x \in (0; 2) \cup \{-4\}\}$ $A' \cup B' = (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (2; \infty)$
35. $x = 4$.
36. $a = 2 \wedge b = 1$
37. 1 pierwiastek, lub 3 pierwiastki.
38. $R(x) = -x + 3$.
39. $R(x) = x + 2$.
40. $m = -4$
41. $m \in (1; \infty)$.
42. $R = 18$.
43. $x - y = 1$
44. $S = 0$; $a_0 = 2^{2004}$.
45. $m = -3 \vee m = 3$.
47. $R = 0$
48. $A = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$ $B = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$; $B \setminus A = \{-1\}$.
49. -
50. -
51. -
52. -
53. Nie.
54. $-x^{12} + 9x^8 - 25x^4 + 20$.
55. Wskazówka $f(b) = w(b)$
56. Wskazówka: Mnożymy obie strony danego równania przez 4 i podstawiamy $4x = y$. Otrzymamy równanie $y^3 + 3y^2 - 16y + 12 = 0$. Stąd $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = -6$, więc $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = -\frac{3}{2}$ i suma jest równa $-\frac{3}{4}$. Warunek podany w zadaniu przy tym sposobie rozwiązania jest zbędny.
57. Dwa.
58. $c = 2$.
59. $-(1-k)^4$.
60. $R(x) = -x + 2$.
61. $a = -3 \wedge b = 2$.
62. $a = -2$; $b = 2$; $c = -1$.
63. a) $(1; \infty)$
b) $R \setminus \{-2\}$
64. 297.
65. a) Funkcje nie mogą być równe.
b) $m = -2$.
66. a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
b) $f(x) = -3 - \frac{1}{x-2}$.

67. $m = 0 \vee m = 1$.

68. $x = 1$.

69. $f(x) = \frac{2x+4}{x+3}$.

70. $(a \neq 1 \wedge b = 0) \vee (a = 1 \wedge b \neq 0)$.

71. $b \neq 1 \wedge a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

72. $k \in \{0; \frac{1}{2}; 1\}$.

73. $k \in (-1; 7)$.

74. $m \in (-3; -1) \cup (-1; 1)$

75. $k \in (-\infty; \frac{2}{3}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$.

76. $m \in (-\frac{1}{3}; 0) \cup (1; \infty)$.

77. $k = -1$.

78. $k = 1$.

79. $k = -2$.

80. $x + u = 2(y + v)$; $x - u = 2(y - v)$.

81. $S = 0$.

82. Jeśli d jest trzecim pierwiastkiem równania to $a = -5-d$; $b = 5d+6$; $c = -6d$.

83. -

84. $m \in (-\infty; 0) \cup (9; \infty)$.

85. $p \in (-\frac{1}{4}; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \infty)$.

86. $a = b = c = 0 \vee a = \frac{3}{5}$ $b = -\frac{9}{5}$; $c = \frac{81}{125} \vee a = -\frac{9}{5}$; $b = \frac{3}{5}$; $c = \frac{81}{125}$.

87. Wskazówka: Jeśli $x^3 + px^2 + qx + x = 0$.

$$x_1 = -1, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = -\sqrt{2}, \text{ wtedy } a = 1 \text{ i } b = -2 \text{ to } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = q \\ x_1x_2x_3 = -r \end{cases}$$

88. $a = -3$; $b = 1$.

89. Równanie ma dwa różne rozwiązania dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ i jedno rozwiązanie dla $m = 1 \vee m = -1$.

90. Dla $p = -3$ równanie ma jedno rozwiązanie, dla $p \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ ma dwa rozwiązania.

91. $(-2; 1)$ $(0; -1)$ $(2; 5)$ $(4; 3)$

92. 1) dwa rozwiązania dla $m \in (0; 1) \cup (1; \infty)$

2) jedno rozwiązanie dla $m = 0 \vee m = 1$

3) brak rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$.

93. $x_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$, $x_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$.

94. $x \in \langle \frac{1}{1 + \sqrt[3]{5}}; \infty \rangle$. Wskazówka: $2x^3 - x^2 + x \frac{1}{3} \geq 0$

$\Leftrightarrow 6x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 5x^3 + x^3 - 3x^2 + 3x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{5}x)^3 + (x-1)^3 \geq 0$.

95. Nie istnieje takie m .

Wskazówka: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) \wedge \Delta \geq 0$.

96. $p \in \langle 3; 5 \rangle$.

Wskazówka: Rozwiąż równanie graficznie.

97. $a \geq 1$.

Wskazówka: Dla $a = 0$ równanie ma jeden pierwiastek dodatni i jeden ujemny.

Dla $a \neq 0$ podstawić $t = (x-a)^2 (t \geq 0)$ i przekształcić równanie do postaci

$$(x - a - 1)(x - a + 1) \left((x - a)^2 - \frac{1}{a} \right) = 0.$$

98. $m \in (3 - 2\sqrt{2}; 1)$.

Wskazówka: $|m|x - 2| - |4x - 8| \geq -5|x - 2| \Leftrightarrow |m||x - 2| \geq$

$$-5|x - 2| + 4|x - 2| \Leftrightarrow |m||x - 2| \geq -|x - 2| \Leftrightarrow x \in R.$$

99. -

100. -